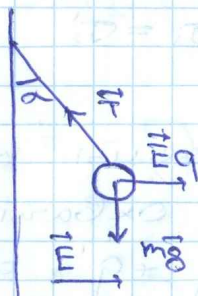


3.1



$$y: T \cos \alpha = mg$$

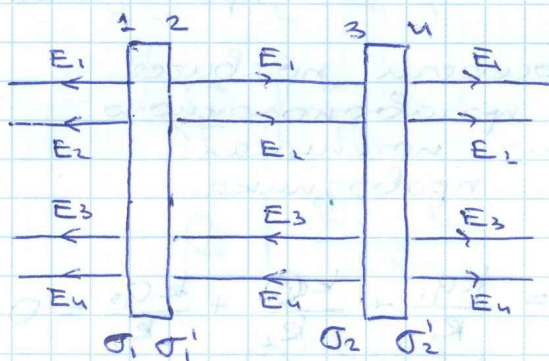
$$x: T \sin \alpha = Eq = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} q$$

$$\tan \alpha = \frac{\sigma q}{2\epsilon_0 mg}$$

$$q = \frac{2mg\epsilon_0 \tan \alpha}{\sigma}$$



3.2



$$E = \frac{\sigma_1}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma'_1}{2\epsilon_0} - \frac{\sigma_2}{2\epsilon_0} - \frac{\sigma'_2}{2\epsilon_0} =$$

$$= \frac{\sigma_1^0 - \sigma_2^0}{2\epsilon_0} = E_{\text{вн}}.$$

$$E'' = -\frac{\sigma_1}{2\epsilon_0} - \frac{\sigma'_1}{2\epsilon_0} - \frac{\sigma_2}{2\epsilon_0} - \frac{\sigma'_2}{2\epsilon_0} =$$

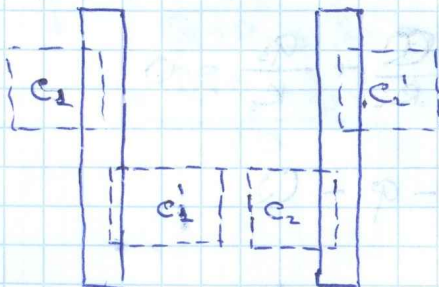
$$= -\frac{\sigma_1^0 + \sigma_2^0}{2\epsilon_0}$$

$$E'' \quad E \quad E'$$

$$\sigma_1^0 = \sigma_1 + \sigma'_1 \quad \sigma_2^0 = \sigma_2 + \sigma'_2$$

$$E' = \frac{\sigma_1}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma'_1}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma_2}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma'_2}{2\epsilon_0} =$$

$$= \frac{\sigma_1^0 + \sigma_2^0}{2\epsilon_0} = -E'' = E_{\text{вн}}.$$



Самостоятельно решить задачу по формулам c_1 и c_2 :

$$\oint \vec{E}_{\text{вн}} \cdot d\vec{S} = \frac{\sum q}{\epsilon_0}$$

$$\sigma'_1 = -\sigma_2 \quad \Leftarrow$$

$$E_{\text{вн}} \cdot S = \frac{\sigma'_1 S}{\epsilon_0} = \frac{-\sigma_2 S}{\epsilon_0}$$

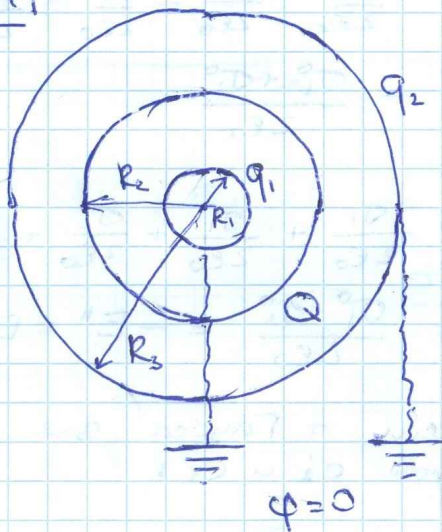
Занесли + Гаусса где выписываем σ_1 и σ_2

$$\text{Внеш } S = \frac{\sigma_1 S}{\epsilon_0} = \frac{\sigma_2 S}{\epsilon_0} \Rightarrow \sigma_1 = \sigma_2$$

3.3 Т.к. суммарный заряд системы не равен 0, и проводник А не охватывает заряд во всех сторон заряд $+q$, то только часть силовых линий, исходящих от $+q$, заканчиваются на индуцированных зарядах проводника.

3.4 На проводящей плоскости появится индуцированный заряд противоположного знака, который уменьшит потенциал проводника.

3.7



$$\begin{cases} \varphi_1 = \frac{kq_1}{R_1} + \frac{kQ}{R_2} + \frac{kq_3}{R_3} = 0 \\ \varphi_3 = \frac{kq_1}{R_3} + \frac{kQ}{R_3} + \frac{kq_3}{R_3} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} q_1 + Q + q_3 = 0 \\ \frac{q_1}{R_1} + \frac{Q}{R_2} + \frac{q_3}{R_3} = 0 \end{cases}$$

$$q_3 = -q_1 - Q$$

$$\frac{q_1}{R_1} = -\frac{Q}{R_2} + \frac{q_1 + Q}{R_3}$$

$$\Rightarrow \cancel{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_3}} = \frac{Q}{R_3}$$

$$\Rightarrow q_1 \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_3} \right) = -Q \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3} \right)$$

$$q_1 = -Q \frac{R_3 - R_2}{R_2 R_3} \cdot \frac{R_1 R_3}{R_3 - R_1} = -Q \frac{R_1}{R_2} \cdot \frac{R_3 - R_2}{R_3 - R_1}$$

$$q_3 = -Q + Q \frac{R_1}{R_2} \cdot \frac{R_3 - R_2}{R_3 - R_1} =$$

$$= Q \left[\frac{R_1}{R_2} \left(1 - \frac{R_3 - R_2}{R_3 - R_1} \right) - 1 \right] =$$

$$= Q \left[\frac{R_1}{R_2} - 1 - \frac{R_1}{R_2} \cdot \frac{R_2 - R_1}{R_3 - R_1} \right] =$$

$$= Q \left[-\frac{R_2 - R_1}{R_2} - \frac{R_2 - R_1}{R_2} \cdot \frac{R_1}{R_3 - R_1} \right] =$$

$$= -Q \frac{R_2 - R_1}{R_2} \cdot \frac{R_3}{R_3 - R_1}$$

$$q = \begin{cases} 0, & r < R_1 \\ q_1, & R_1 \leq r < R_2 \\ Q + q_1, & R_2 \leq r < R_3 \\ Q + q_1 + q_3, & R_3 \leq r \\ = 0 \end{cases}$$

тогда по теореме Гаусса
имеем:

$$E 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}$$

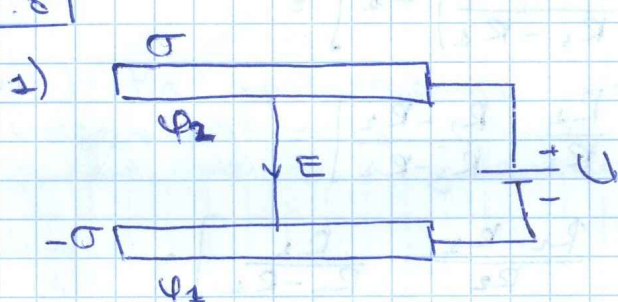
$$U = (x-b) \cdot 3 + y \cdot 5 \quad | \cdot 0.5$$

$$U = 1.5x - 1.5b + 2.5y$$

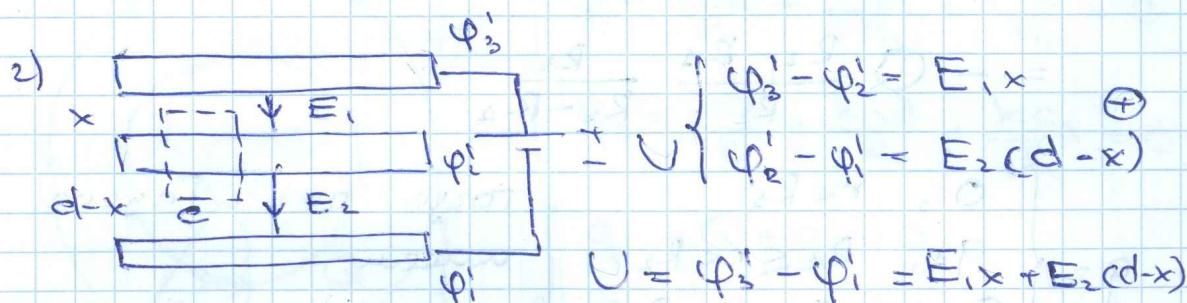
6. utore unuam

$$E = \begin{cases} 0, & r < R_1 \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2} \cdot \frac{R_1}{R_2} \cdot \frac{R_3 - R_2}{R_3 - R_1}, & R_1 \leq r < R_2 \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2} \cdot \frac{R_3}{R_2} \cdot \frac{R_2 - R_1}{R_3 - R_1}, & R_2 \leq r < R_3 \\ 0, & R_3 \leq r \end{cases}$$

3.8



$$\begin{aligned} \varphi_2 - \varphi_1 &= U = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \\ &= E d = \frac{Q}{\epsilon_0} d \end{aligned}$$



Зарядки +. Поле же суммарно C :

$$-E_1 S + E_2 S = \frac{\sigma S}{\epsilon_0} \Rightarrow -E_1 + E_2 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{U}{d}$$

т.о.

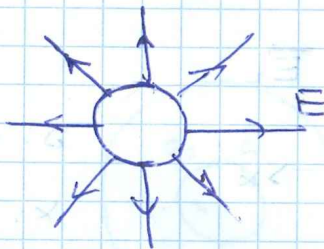
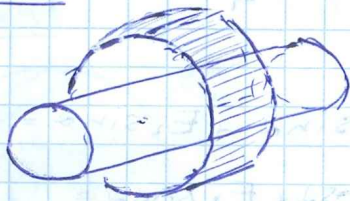
$$\begin{cases} E_1 x + E_2 (d-x) = U \\ -E_1 + E_2 = \frac{U}{d} \end{cases}$$

$$E_1 = E_2 - \frac{U}{d}$$

$$\cancel{E_2 x} - \frac{U x}{d} + E_2 d - \cancel{E_2 x} = U \Rightarrow E_2 = U \frac{d+x}{d^2}$$

$$E_1 = U \frac{d+x}{d^2} - \frac{U}{d} = U \frac{x}{d^2}$$

3.11



1) $r \geq R$ по r Гаусса: $E \cdot 2\pi r \cdot h = \frac{Q}{\epsilon_0}$

$$Q = \pi R^2 \cdot h \cdot \rho$$

$$E = \frac{R^2 \rho}{2\epsilon_0 r}$$

$$\vec{E} = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0 r^2} \vec{r}$$

2) $r \leq R$ по r Гаусса:

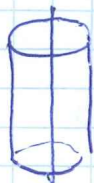
$$E \cdot 2\pi r \cdot h = \frac{\pi r^2 h \rho}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{\rho r}{2\epsilon_0}$$

$$\vec{E} = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \vec{r}$$

3.12

1) Напряжённость от провода

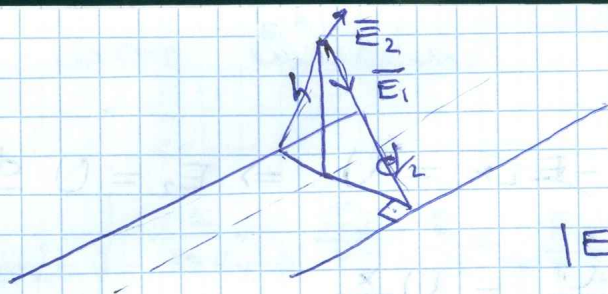


по r Гаусса:

$$E \cdot 2\pi r \cdot l = \frac{\rho l}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{\rho}{2\pi r \epsilon_0}$$

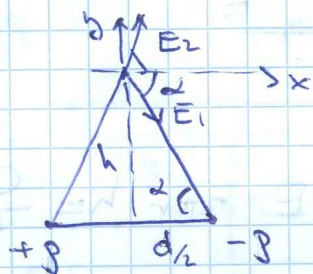
2)



$$|E_1| = |E_2| = \frac{\rho}{2\pi r \epsilon_0} =$$

$$= \frac{\rho}{2\pi \sqrt{h^2 + \frac{d^2}{4}} \epsilon_0}$$

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$



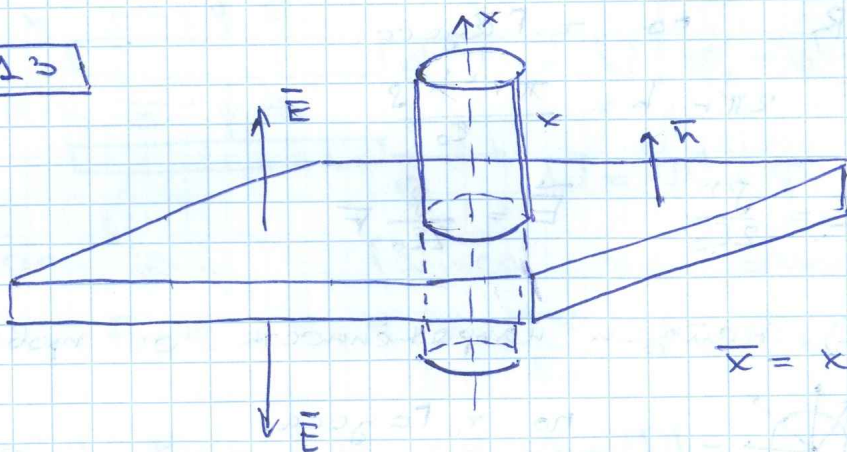
$$y: -E_1 \sin \alpha + E_2 \sin \alpha = 0$$

$$x: E_1 \cos \alpha + E_2 \cos \alpha =$$

$$= \frac{2\rho}{2\pi \sqrt{h^2 + \frac{d^2}{4}} \epsilon_0} \cdot \frac{d}{2 \sqrt{h^2 + \frac{d^2}{4}}} =$$

$$= \frac{\rho d}{2\pi \epsilon_0 (h^2 + \frac{d^2}{4})} = \frac{2\rho d}{\pi \epsilon_0 (4h^2 + d^2)}$$

3.13



$$\vec{x} = x \cdot \vec{n}$$

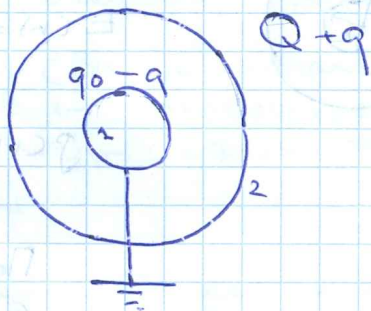
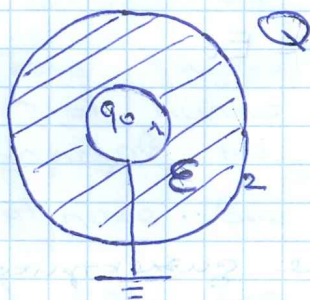
по т. Гаусса (Вне пластины)

$$2ES = \frac{\rho S 2d}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\rho d}{\epsilon_0}; \quad \vec{E} = \frac{\rho d}{\epsilon_0} \vec{n}$$

по т. Гаусса (Внутри пластины)

$$2ES = \frac{\rho S 2x}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\rho x}{\epsilon_0}; \quad \vec{E} = \frac{\rho x}{\epsilon_0}$$

3.14



с одной стороны

$$\varphi_1 = \frac{q_0}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r}$$

с другой

$$\varphi_1 = \frac{q_0 - q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

$$\Rightarrow \frac{q_0}{\epsilon} = q_0 - q \Rightarrow q = q_0 \left(1 - \frac{1}{\epsilon}\right)$$

$$0 = \varphi_1 + \varphi_2 = \frac{q_0 - q}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{Q - q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

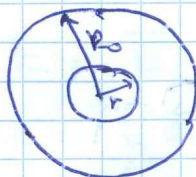
$$\frac{q_0}{\epsilon r} + \frac{Q}{R} + \frac{q_0}{R} - \frac{q_0}{\epsilon R} = 0$$

$$q_0 \left(1 - \frac{1}{\epsilon} + \frac{R}{r} \frac{1}{\epsilon}\right) = -Q$$

$$q_0 \left(\frac{\epsilon + \frac{R}{r} - 1}{\epsilon} \right) = -Q$$

$$q_0 = -Q \frac{\epsilon}{\epsilon - 1 + \frac{R}{r}}$$

3.15

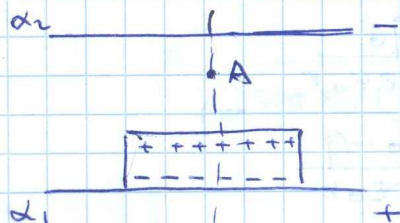


$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{\int \frac{1}{3} \pi r^3}{\epsilon_0}$$

$$E(r) = \frac{\rho(r) \cdot \frac{1}{3} \pi r^3}{\epsilon_0} = E_0$$

$$\rho(r) = \frac{3\epsilon_0 E_0}{r}$$

3.6



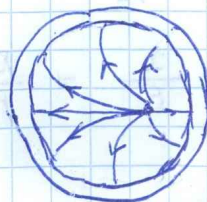
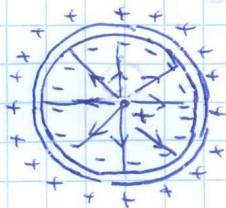
После внесения диэлектрика между пластин, поверхность. плотность заряда на пластине α_2 напротив диэлектрика увеличится $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ напряжён. E_A увеличится.

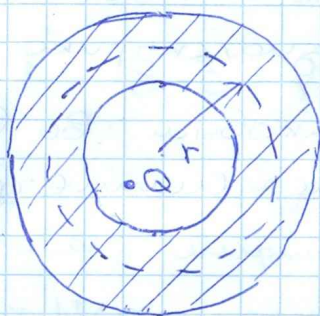
3.5

2) Очевидно, что при перемещении зарядов внутри сферы заряд (индуцированный) на внутренней обкладке будет перераспределяться

$\Rightarrow$ поле изменится.



Рассмотрим следующую сферу (шупиктур)



радиуса r :

Запишем т. Гаусса:

$$\oint \mathbf{D} d\mathbf{S} = q \Rightarrow q = 0$$

$$= 0, \text{ т.к. } \mathbf{D} = \epsilon \epsilon_0 \mathbf{E} = 0.$$

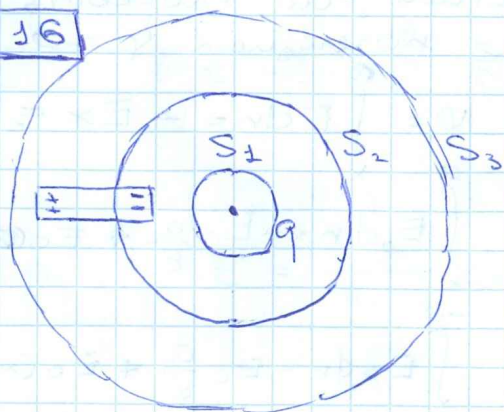
Заряд индуцируемый на внутренней поверхности метал. сферы равен $-Q$.

Поле внутри метал. сферы (внутри металла) равно 0 $\Rightarrow$ ничто не способно вызвать перераспределение зарядов на внут. поверхности сферы $\Rightarrow$ поле вне сферы = 0.

2) Как уже было выяснено выше поле внутри оболочки и вне её не зависит от заряда. $\Rightarrow$ ~~выяснено~~ выяснение заряженности проводника повлияет только на внешнее поле, но не на внутреннее.

* рассуждение справедливо для $\forall$ оболочки, а не только для сферы.

3.16



По т. Гаусса имеем:

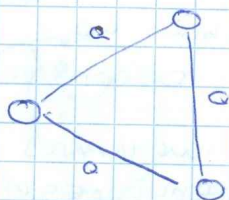
$$\oint \Phi d\mathbf{S} = q, \text{ т.о.}$$

$$\Phi_{E1} = \Phi_{E2} = \Phi_{E3} = q$$

$$\Phi_{E1} = \Phi_{E3} = \frac{q}{\epsilon_0} > \Phi_{E2}$$

Теорема Гаусса не позволяет посчитать $\vec{D}(\vec{r})$, т.к. из-за влияния диэлектрика $\vec{D}(\vec{r})$ перестает быть одинаковым во всех направлениях. (отсутствие симметрии).

3.9



$$\begin{cases} \frac{kq_1}{R} = U \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \frac{kq_2}{R} = \frac{kq_1}{a} + U \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} \frac{kq_3}{R} = \frac{kq_1}{a} + \frac{kq_2}{a} + U \end{cases} \quad (3)$$

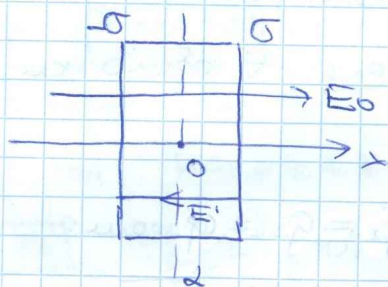
$$\frac{(3) - (1)}{(2) - (1)} : \quad \frac{q_3 - q_1}{q_2 - q_1} = \frac{q_1 + q_2}{q_1} \Rightarrow q_3 = \frac{q_1^2}{q_2}$$

3.18

$$\varphi = 0$$

$$(2) \quad D = \epsilon_0 E_0 = \epsilon \epsilon_0 E$$

$$\Rightarrow E = \frac{E_0}{\epsilon} \quad (\text{поле внутри диэлектрика})$$



Положим, что потенциал $\varphi = 0$.

$$1) \quad |x| < a \quad \varphi = \int_x^0 E dr = -Ex = -\frac{E_0 x}{\epsilon}$$

$$2) \quad x > a \quad \varphi = \int_a^0 E dr + \int_0^x E_0 dr = -E_0 \frac{a}{\epsilon} - E_0(x-a)$$

$$x < -a \quad \varphi = \int_0^{-a} E dr + \int_{-a}^x E_0 dr = E_0 \frac{a}{\epsilon} - E_0(x+a)$$

$$(2) E = E_0 - E' = E_0 - \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{E_0}{\epsilon} \Rightarrow \sigma = \epsilon_0 \left(\frac{\epsilon - 1}{\epsilon} \right) E_0$$

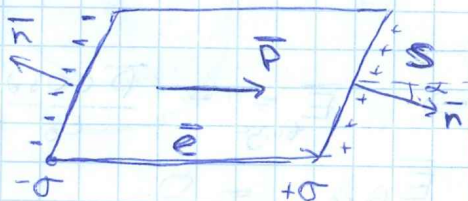
$$(3) \bar{P} = \bar{D} - \bar{E} = \epsilon_0 (\epsilon - 1) \bar{E} = \frac{\epsilon - 1}{\epsilon} \epsilon_0 \bar{E}_0$$

3.20 Из задачи 1.17 известно, что полоса, шириной b и L , создаёт напряж. в т. М, находящейся на расстоянии $\ell/2$ от пластины и равноудалённой от её краёв, равное:

$$E = \frac{\sigma}{\pi \epsilon_0} \operatorname{arctg} \frac{L}{\ell}$$

Докажем следующий факт:

$$\sigma = (\bar{P}, \bar{n}) = P \cos \alpha$$



$$\bar{P} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{i=1}^n \bar{P}_i = \frac{\sigma S}{V} \bar{e} = \frac{\sigma \ell}{S \ell \cos \alpha} \bar{e}$$

$$\Rightarrow \sigma = (\bar{P}, \bar{n})$$

т.о.
$$E = \frac{P}{\pi \epsilon_0} \operatorname{arctg} \frac{L}{\ell}$$

т.к. у диэлектрика где поверхность то
(разноманно заряжен.)

$$E_0 = 2E = \frac{2P}{\pi \epsilon_0} \arctg \frac{L}{e} \quad (\vec{E}_0 \uparrow \downarrow \vec{P})$$

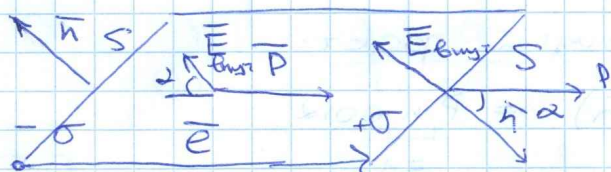
a) $e \ll L$: $E_0 = \frac{2P}{\pi \epsilon_0} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{P}{\epsilon_0}$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}_0 + \vec{P} = 0$$

b) $e \gg L$: $E_0 = \frac{2P}{\pi \epsilon_0} \cdot \frac{L}{e} \quad (\vec{E}_0 \uparrow \downarrow \vec{P})$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}_0 + \vec{P} = \vec{P} \left(1 - \frac{2L}{\pi e} \right)$$

3.19

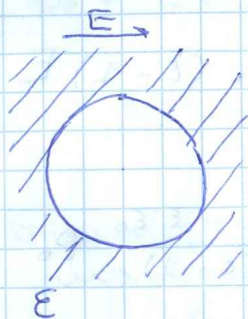


$$0 = \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}_{\text{внут}} + \vec{P} \cos \alpha \Rightarrow \vec{E}_{\text{внут}} = - \frac{P \cos \alpha}{\epsilon_0}$$

$$0 = \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}_{\text{внеш}} \Rightarrow \vec{E}_{\text{внеш}} = 0.$$

$\vec{D} = 0$ консервируется + Гаясса.

3.21

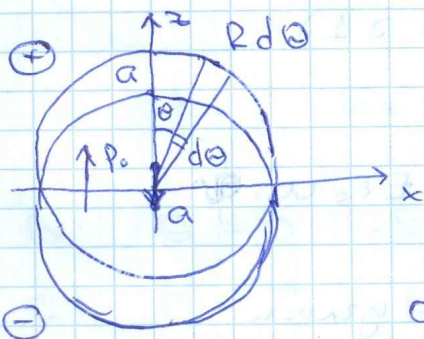


Напряжённость E' внутри сферы можно представить в виде разности однородного поля E и поля E_1 , создаваемого шаром (вместо полосты) из диэлектрика.

Из примера 2.10 известно, что распределение заряда на поверхности шара удовл. соотнош.

$$\sigma = \sigma_0 \cos \theta = \rho_0 \cos \theta. \quad (3.20)$$

Найдём E_1 : (поле углов. зарядов).

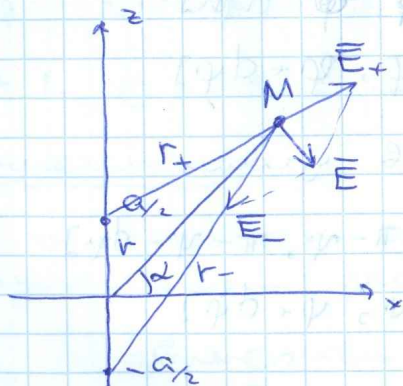


$$dq = \rho \cdot 2\pi R \sin \theta \cdot R d\theta \cdot a \cos \theta$$

$$dS = 2\pi R \sin \theta \cdot R d\theta$$



$$\sigma = \frac{dq}{dS} = \rho_0 \cos \theta$$



$$E_+ = \frac{\rho r_+}{3\epsilon_0} \quad E_- = \frac{\rho r_-}{3\epsilon_0}$$

$$E_x = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r \cos \alpha - \frac{\rho}{3\epsilon_0} r \cos \alpha = 0$$

$$E_z = \frac{\rho}{3\epsilon_0} (r \sin \alpha - \frac{a}{2}) -$$

$$- \frac{\rho}{3\epsilon_0} (r \sin \alpha + \frac{a}{2}) =$$

$$= - \frac{\rho a}{3\epsilon_0} = - \frac{\sigma_0}{3\epsilon_0} = - \frac{\rho_0}{3\epsilon_0}$$

т.о. $\vec{E}_1 = -\frac{\vec{P}_0}{3\epsilon_0}$; $\vec{E} \uparrow \uparrow \vec{P}_0$

$$D = \epsilon_0 E + P_0 = \epsilon_0 E \Rightarrow P_0 = \epsilon_0 (\epsilon - 1) E$$

тогда

$$E' = E + E_1 = \frac{1}{\epsilon_0 (\epsilon - 1)} \frac{P_0}{3\epsilon_0} + \frac{P_0}{3\epsilon_0} = \frac{2\epsilon_0 + \epsilon\epsilon_0}{3(\epsilon - 1)} P_0$$

в ответе должно

быть E_1 $\Rightarrow E + \frac{(\epsilon - 1) E}{3} = \frac{\epsilon + 2}{3} E$

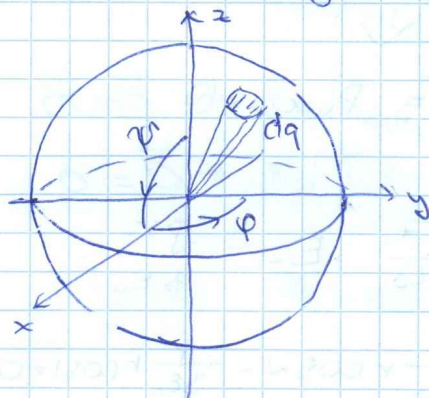
3.22 Найдем дипольный момент шара.

2) Поле создаваем. инд. зарядами должно походить внешнее поле!

$$E_0 = \frac{\sigma_0}{3\epsilon_0} \quad (3.21)$$

из примера 2.10:

$$\sigma = \sigma_0 \cos \psi = 3\epsilon\epsilon_0 \cos \psi$$



dq соотв. углам:

$$\psi \in [\psi, \psi + d\psi]$$

$$\varphi \in [\varphi, \varphi + d\varphi]$$

$-dq$ соотв. углам:

$$\psi \in [\pi - \psi, \pi - \psi - d\psi]$$

$$\varphi \in [\varphi, \varphi + d\varphi]$$

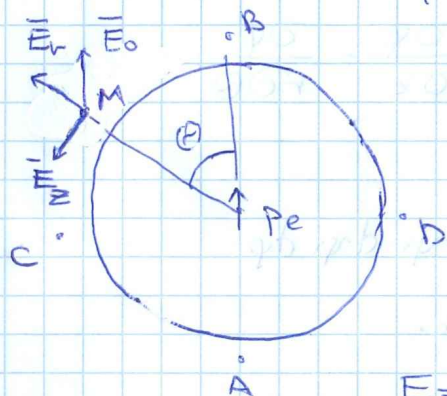
их дипольн. моменты:

$$d\vec{p} = \sigma(\psi) \cdot \frac{R^2 d\psi \sin \psi d\varphi}{ds} \cdot \frac{2R \cos \psi}{\epsilon}$$

$$p_e = 2R^3 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sigma(r\varphi) \sin\varphi \cos\varphi d\varphi =$$

$$= 4\pi\epsilon_0 E_0 R^3$$

2) Внешнее поле будет определяться диполем.
моментом p_e и E_0 .



$$\varphi(M) = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{p \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$E = -\text{grad}\varphi: \quad r \sim R$$

$$E_r = -\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p \cos\theta}{r^3}$$

$$E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z} = -\frac{\partial\varphi}{r \partial\theta} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \sin\theta}{r^3}$$

$$B: \quad \theta = 0 \quad E_B = E_0 + \frac{2p}{4\pi\epsilon_0 R^2} = 3E_0$$

$$C: \quad \theta = \frac{\pi}{2} \quad E_C = E_0 - \frac{p}{4\pi\epsilon_0 R^2} = 0$$

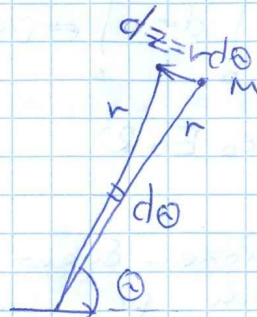
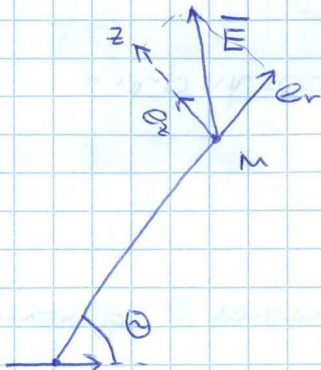
$$D: \quad \theta = \frac{3\pi}{2} \quad E_D = E_C = 0$$

$$A: \quad \theta = \pi \quad E_A = E_B = 3E_0$$

Замечание:

E_r определяется движением точки M , вызванным изменением расстояния r при фикс. θ .

E_z — движением точки M , вызв. измен. θ при фиксиров. r .

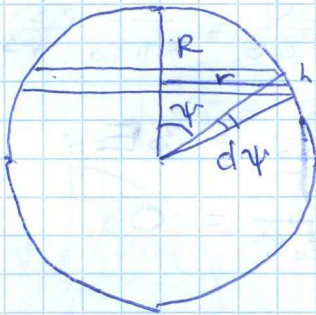


Умножив беря производную по z: $\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial \varphi}{r \partial \theta}$

Задача 2:

Обозначим, что $dS = R^2 \sin \psi \, d\psi \, d\varphi$

1) посчитаем площадь конуса.



$$S_{\text{конуса}} = 2\pi \frac{R \sin \psi}{r} \frac{R d\psi}{h}$$

$$2) \quad dS = \frac{S_{\text{конуса}}}{2\pi} d\varphi =$$

$$= R^2 \sin \psi \, d\psi \, d\varphi$$